

Dreidimensionale N-Körper-Simulationen

Mit den hier beschriebenen Verfahren und Beispielen sollen keine wissenschaftlichen Fragestellungen behandelt werden, sondern es soll gezeigt werden, dass mit einfachen Mitteln eigene Berechnungen möglich sind, die einige Aspekte der dreidimensionalen N-Körper-Simulationen veranschaulichen.

Bewegungsgleichungen

Wir untersuchen die dreidimensionale Bewegung von N Massen m_i unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Gravitationsanziehung. Deren Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad \text{und} \quad \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}_i$$

Dabei sind \vec{x}_i die Positionsvektoren, \vec{v}_i die Geschwindigkeitsvektoren und \vec{a}_i die Beschleunigungsvektoren. Letztere ergeben sich aus dem [Gravitationsgesetz](#) zu

$$\vec{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{d_{ij}^3}$$

mit $d_{ij} = |\vec{x}_j - \vec{x}_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$,

dem Abstand zwischen den Massen m_i und m_j . Die Größen sind dabei durch Setzen der Gravitationskonstante $G = 1$ normiert.

Numerische Integration der Bewegungsgleichungen

Für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen verwenden wir ein [Leapfrog-Verfahren](#) mit einer einfachen [Schrittweitensteuerung](#), die von der maximalen Beschleunigung

$$a_{\max} = \max_{i=1 \dots N} |\vec{a}_i|$$

wie folgt abhängt:

Ist $a_{\max} \Delta t > \varepsilon$, wird die Schrittweite halbiert,
 ist $a_{\max} \Delta t < \varepsilon/2$, wird die Schrittweite wieder verdoppelt.

Wenn der Abstand d_{ij} zwischen zwei Massen sehr klein wird und damit die Beschleunigung a_i sehr groß, läuft sich die Schrittweitensteuerung fest. Um das zu verhindern verwenden wir ein [Plummer-Potential](#), bei dem d_{ij} wie folgt modifiziert wird:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 + \delta^2}$$

Dadurch wird d_{ij} nie kleiner als δ , und die maximale Beschleunigung bleibt beschränkt, so dass die Schrittweite Δt nicht zu klein wird. Dadurch werden sehr enge Zweikörper-Begeg-

nungen zwar nicht exakt berechnet, aber dies hat auf die großräumigen Strukturen keinen signifikanten Einfluss.

Anfangsbedingungen

Für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen werden Anfangsbedingungen für die Positionen und Geschwindigkeiten der Massen benötigt.

Massen

Darüber hinaus muss die Größe der einzelnen Massen m_i festgelegt werden. Im einfachsten Fall werden alle Massen als gleich groß angesetzt.

Gammaverteilung der Massen

Um eine Verteilung unterschiedlicher Massen zu erhalten, bietet sich die Gammaverteilung an, da sie keine negativen Werte liefert. Mit der Gesamtmasse M der N Massen wird

$$m = G_{inv}(\zeta, \alpha, \beta) M/N$$

Dabei ist G_{inv} die inverse Gammaverteilung und ζ eine Zufallszahl, die zwischen 0 und 1 gleichverteilt ist und für jede Masse neu berechnet wird. Die Parameter α und β werden so gewählt, dass der Mittelwert der Verteilung 1 ist:

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \quad \beta = s_m^2$$

Dabei ist s_m die Standardabweichung der Gammaverteilung. Für s_m sollte ein Wert zwischen 0,2 und 0,7 gewählt werden. Damit am Ende die Summe der Massen tatsächlich M ist, müssen alle Massen noch um den Faktor

$$M / \sum_{i=1}^N m_i$$

korrigiert werden.

Positionen

Die Anfangspositionen der einzelnen Massen werden mittels Zufallszahlen verteilt.

Normalverteilung in x, y und z

Die drei Komponenten der Position können mit Hilfe von drei unabhängigen Zufallszahlen ζ_1 , ζ_2 und ζ_3 , die zwischen 0 und 1 gleichverteilt sind, normalverteilt werden:

$$x = N_{inv}(\zeta_1, 0, r_S) \quad y = N_{inv}(\zeta_2, 0, r_S) \quad z = N_{inv}(\zeta_3, 0, r_S)$$

Dabei ist N_{inv} die inverse Normalverteilung, 0 der Mittelwert und r_S der Skalenradius gleich der Standardabweichung der Normalverteilung.

Innerhalb des Skalenradius r_s liegen durchschnittlich 31,8 % der Massen und innerhalb des doppelten Skalenradius $2r_s$ durchschnittlich 87,0 %.

Gleichverteilung innerhalb einer Kugel

Eine Gleichverteilung innerhalb einer Kugel mit dem Radius R erhält man mit Hilfe der Kugelkoordinaten Radius r , Azimut φ und Polwinkel ϑ :

$$\begin{array}{lll} x = r \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \leq r \leq R & r = R \zeta_1^{2/3} \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi & \varphi = 2\pi \zeta_2 \\ z = r \cos \vartheta & 0 \leq \vartheta \leq \pi & \vartheta = \arccos(1 - 2\zeta_3) \end{array}$$

Dabei sind ζ_1 , ζ_2 und ζ_3 wieder drei unabhängige Zufallszahlen, die zwischen 0 und 1 gleichverteilt sind. Ein Beispiel ist in Abb. 1a zu sehen.

Abplattung

Bei beiden Verteilungen kann die z -Koordinate mit einem Faktor $f_A < 1$ reduziert werden, um eine Abplattung der Verteilung zu erreichen. Ein Beispiel ist in Abb. 3a zu sehen.

Schwerpunkt

Die mittels Zufallszahlen berechneten Positionen werden so korrigiert, dass der Schwerpunkt

$$\vec{x}_S = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i / M$$

Null wird. Dazu wird von jeder Position der berechnete Wert von \vec{x}_S abgezogen.

Radiale Massenverteilung

Aus den einzelnen Massen und Positionen ergibt sich die charakteristische radiale Massenverteilung

$$M(r) = \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r}}^N m_i$$

mit

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

Geschwindigkeiten

Die Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Massen werden mittels Zufallszahlen verteilt.

Normalverteilung in x, y und z

Die Normalverteilung der Geschwindigkeiten erfolgt analog der Normalverteilung der Positionen:

$$v_x = N_{inv}(\zeta_1, 0, v_S) \quad v_y = N_{inv}(\zeta_2, 0, v_S) \quad v_z = N_{inv}(\zeta_3, 0, v_S)$$

Hierbei ist v_S die Standardabweichung vom Mittelwert 0. Der Durchschnittswert für den Betrag der Geschwindigkeit ist $\sqrt{8/\pi} v_S \approx 1,59577 v_S$.

Bei dieser Verteilung kann die z-Komponente der Geschwindigkeit um den Faktor f_A reduziert werden, um einer **Abplattung** der Massenverteilung Rechnung zu tragen.

Kreisbahngeschwindigkeit

Die **Kreisbahngeschwindigkeit** ergibt sich aus der radialen Massenverteilung zu

$$v_c = \sqrt{\frac{M(r)}{r}}$$

Dies ist nur ein theoretischer Wert, da die Gesamtmasse nicht homogen radialsymmetrisch ist, sondern aus Punktmassen besteht. Geht man trotzdem von einem anfänglichen Gleichgewicht zwischen Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung aus, ist die Radialgeschwindigkeit $v_r = 0$ und die anderen Geschwindigkeitskomponenten in Kugelkoordinaten sind

$$v_\vartheta = -v_c \sin \psi \quad \text{und} \quad v_\varphi = v_c \cos \psi$$

mit einem Winkel ψ zwischen 0 und 2π . Die Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt

$$v_x = -v_c (\sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi)$$

$$v_y = -v_c (\sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi)$$

$$v_z = v_c \sin \psi \sin \vartheta$$

Berechnet man das Skalarprodukt $\vec{r} \cdot \vec{v}$, so ergibt sich Null, womit nachgewiesen ist, dass der Geschwindigkeitsvektor senkrecht auf dem Positionsvektor steht.

Der Winkel ψ wird mit einer Zufallszahl ζ_1 , die zwischen 0 und 1 gleichverteilt ist, als $\psi = 2\pi \zeta_1$ berechnet.

Zusätzlich kann mit einer zweiten Zufallszahl ζ_2 , die ebenfalls zwischen 0 und 1 gleichverteilt ist, eine normalverteilte Radialgeschwindigkeit $v_r = N_{inv}(\zeta_2, 0, f_S v_c)$ angesetzt werden. Dabei ist $f_S v_c$ die Standardabweichung vom Mittelwert 0, proportional zur Kreisgeschwindigkeit.

Verteilung mit der Kreisgeschwindigkeit

Statt zuerst die Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn zu berechnen und dann eine zufällige Radialgeschwindigkeit zu addieren, können Betrag und Richtung der Geschwindigkeit wie folgt angesetzt werden:

$$v = N_{inv}(\zeta_1, v_c, f_S v_c)$$

$$\vartheta = \arccos(1 - 2\zeta_2)$$

$$\varphi = 2\pi \zeta_3$$

Dabei ist v_c die Kreisgeschwindigkeit und $f_S v_c$ die Standardabweichung, proportional zur Kreisgeschwindigkeit. Der Faktor f_S sollte deutlich kleiner als 0,414 sein, weil sonst viele Massen die **Fluchtgeschwindigkeit** $v_e = \sqrt{2} v_c$ überschreiten. ζ_1 , ζ_2 und ζ_3 sind wieder drei unabhängige Zufallszahlen, die zwischen 0 und 1 gleichverteilt sind.

Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist bei diesem Ansatz, anders als bei der Normalverteilung um die Kreisbahn, im Raum gleichverteilt. Die Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt:

$$v_x = v \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$v_y = v \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$v_z = v \cos \vartheta$$

Bei dieser Geschwindigkeitsverteilung kann eine **Abplattung** dadurch erreicht werden, dass ϑ wie folgt modifiziert wird:

$$\vartheta = \arccos(f_A(1 - 2\zeta_2))$$

Dadurch wird v_z um den Faktor $f_A < 1$ reduziert, ohne dass der Betrag der Geschwindigkeit verändert wird.

Gesamtimpuls

Die mittels Zufallszahlen berechneten Geschwindigkeiten werden so korrigiert, dass der Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Null wird. Dazu wird von jeder Geschwindigkeit $\Delta \vec{v} = \vec{P}/M$ abgezogen, wobei M die Gesamtmasse ist.

Beispiele

Beispiel 1 zeigt das Ergebnis einer anfänglichen Gleichverteilung von 100 Massen der Größe 1 innerhalb einer Kugel mit dem Radius 4 und anfänglichen Kreisbahngeschwindigkeiten zum Startzeitpunkt und nach 7,5 und 25 Zeiteinheiten, jeweils in den normierten Einheiten. Der Plummer-Radius wurde mit $\delta = 0,05$ angesetzt und das Schrittweitenkriterium mit $\varepsilon = 0,25$.

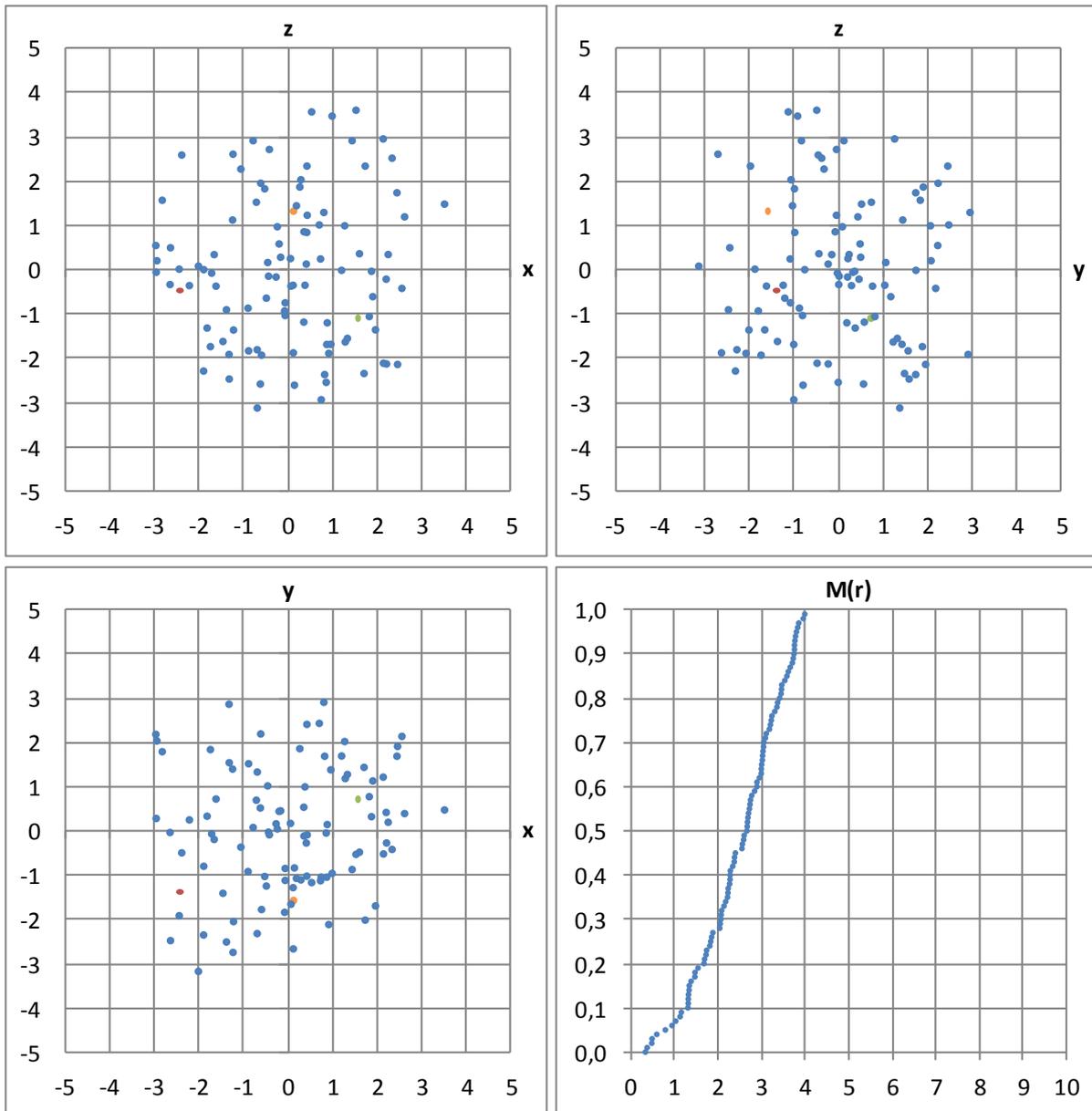


Abb. 1a: Beispiel 1 bei $t = 0$

Der anfängliche Zeitschritt $\Delta t = 0,0025$ verringert sich durch die Schrittweitensteuerung zeitweise bis auf $\Delta t = 0,000625$.

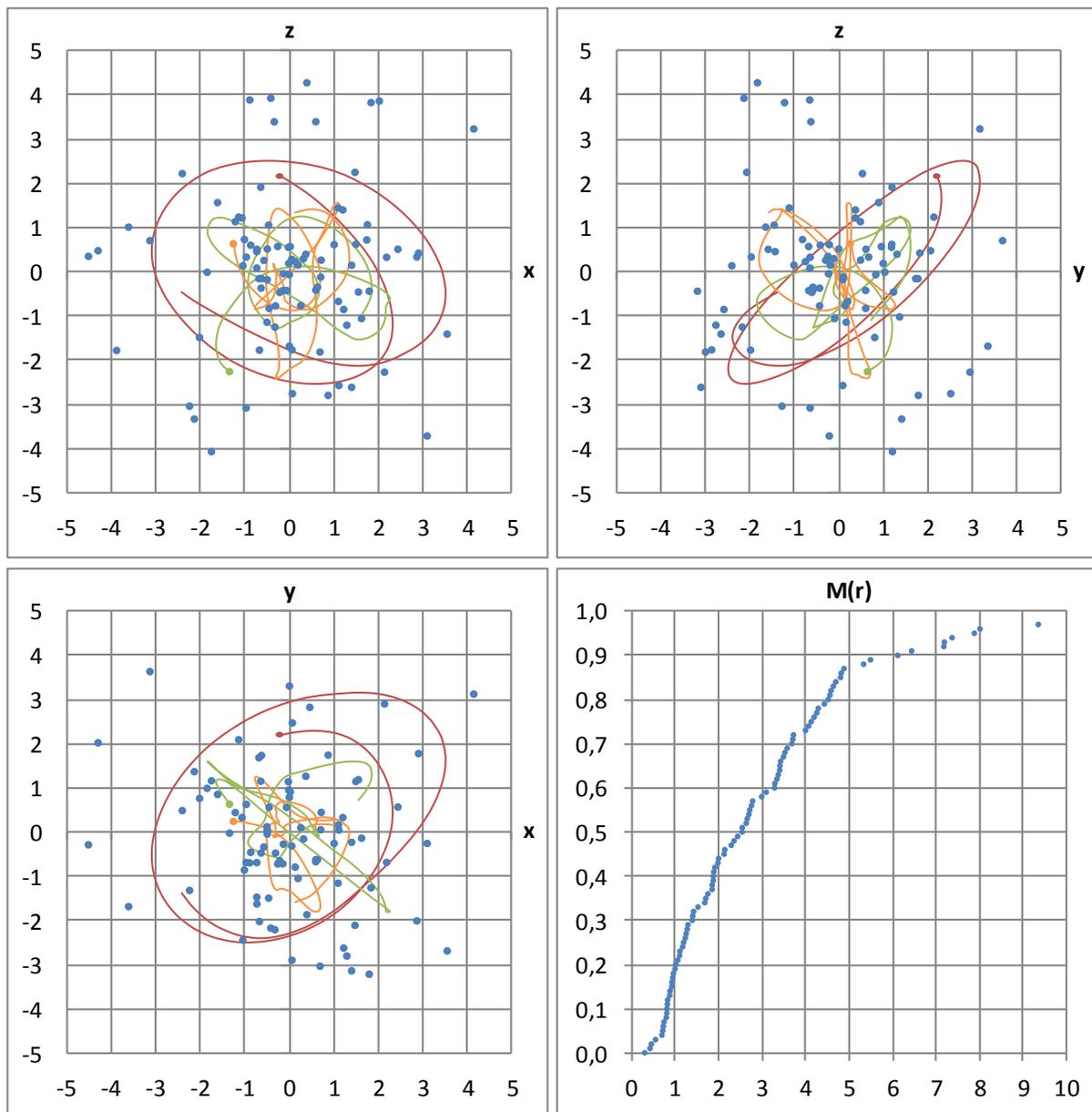


Abb. 1b: Beispiel 1 bei $t = 7,5$

Zusätzlich zu den Positionen aller Massen sind drei zufällig ausgewählte Bahnen eingezeichnet.

Der Vergleich der radialen Massenverteilungen bei $t = 0$ und $t = 7,5$ zeigt, dass die gewählte Anfangskonfiguration relativ stabil ist. Durch den relativ kleinen Plummer-Radius kommt es aber auch zu engen Begegnungen mit hohen Beschleunigungen, die einzelne Massen weit nach außen befördern.

Über größere Zeiträume verändert sich die Massenverteilung aber deutlich, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.

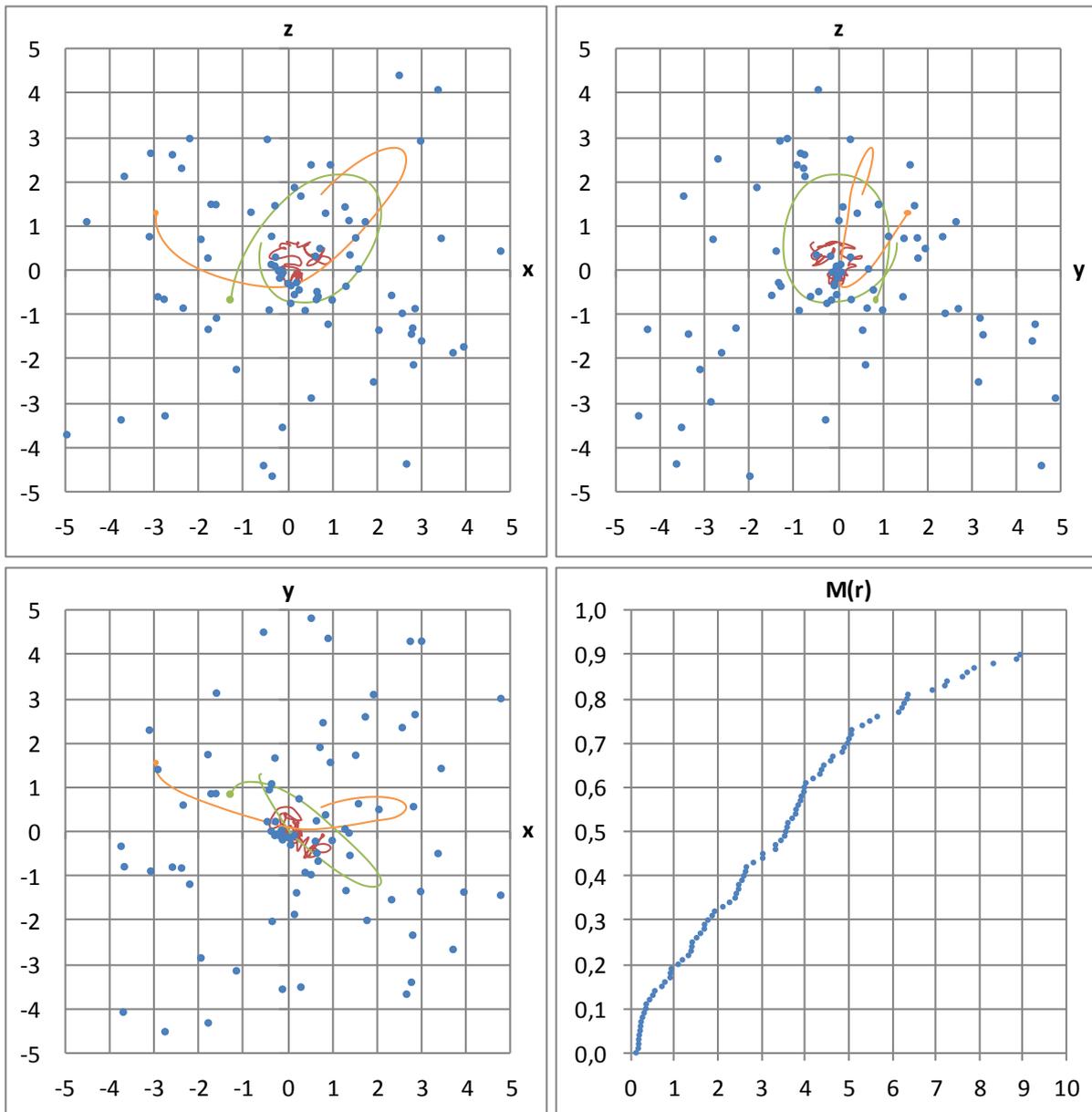


Abb. 1c: Beispiel 1 bei $t = 25$

Es hat sich ein kleiner Kern gebildet, der etwa 15 % der Massen enthält. Noch etwa 60 % der Massen befinden sich innerhalb des ursprünglichen Kugelradius $R = 4$.

Der Zeitschritt hat sich aufgrund der geringeren Abstände zwischen den Massen im Kern zeitweise bis auf $\Delta t = 0,0003125$ verkleinert. Eine weitere Verkleinerung der Zeitschritte verhindert das Plummer-Potential mit $\delta = 0,05$.

Zusätzlich zu den Positionen der Massen sind die drei Bahnen aus Abb. 1b ab $t = 22$ eingezeichnet. Auffällig ist, dass die rot eingezeichnete Masse, die sich in Abb. 1b noch auf einer äußeren Bahn befunden hat, in den Kern eingefangen wurde.

Beispiel 2 unterscheidet sich von Beispiel 1 dadurch, dass die 100 Massen nicht gleich groß sind sondern gammaverteilt mit einer Standardabweichung $s_m = 0,4$ um den Mittelwert 1. In diesem Beispiel variieren die Massen zwischen 0,325 und 2,299 Masseneinheiten. Der Durchmesser der Symbole für die einzelnen Massen in den nachfolgenden Abbildungen ist proportional zur Kubikwurzel der Masse.

Die Parameter sind ansonsten die gleichen wie in Beispiel 1: Räumliche Gleichverteilung der Massen innerhalb einer Kugel mit dem Radius 4 mit anfänglichen Kreisbahngeschwindigkeiten, Plummer-Radius $\delta = 0,05$ und Schrittweitenkriterium $\varepsilon = 0,25$.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Anfangsverteilung der Massen.

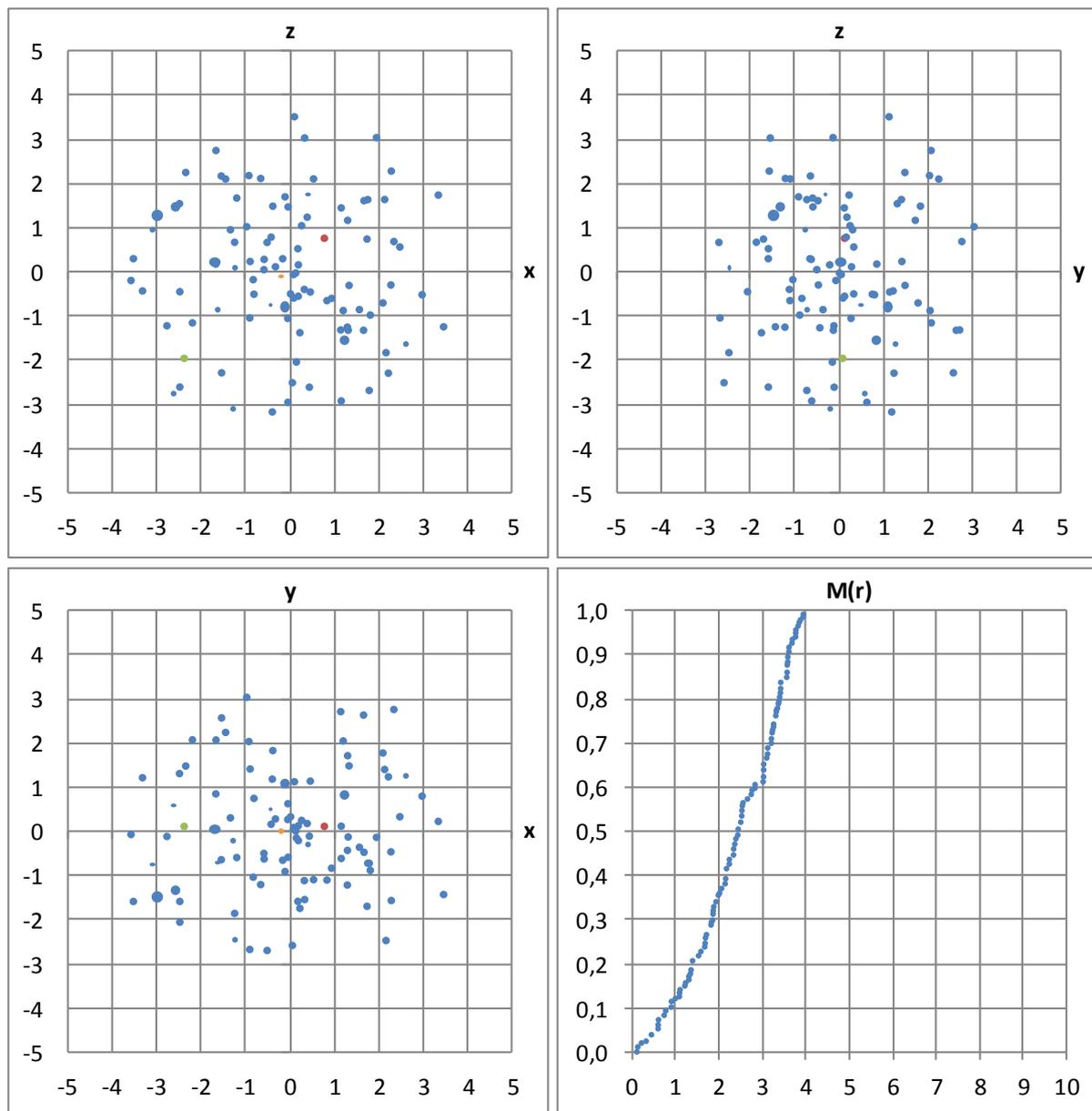


Abb. 2a: Beispiel 2 bei $t = 0$

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Positionen der Massen nach 6 Zeiteinheiten sowie die Bahnen dreier zufällig ausgewählter Massen: $m_1 = 0,8665$ (rot), $m_2 = 0,8966$ (grün) und $m_3 = 0,4156$ (orange).

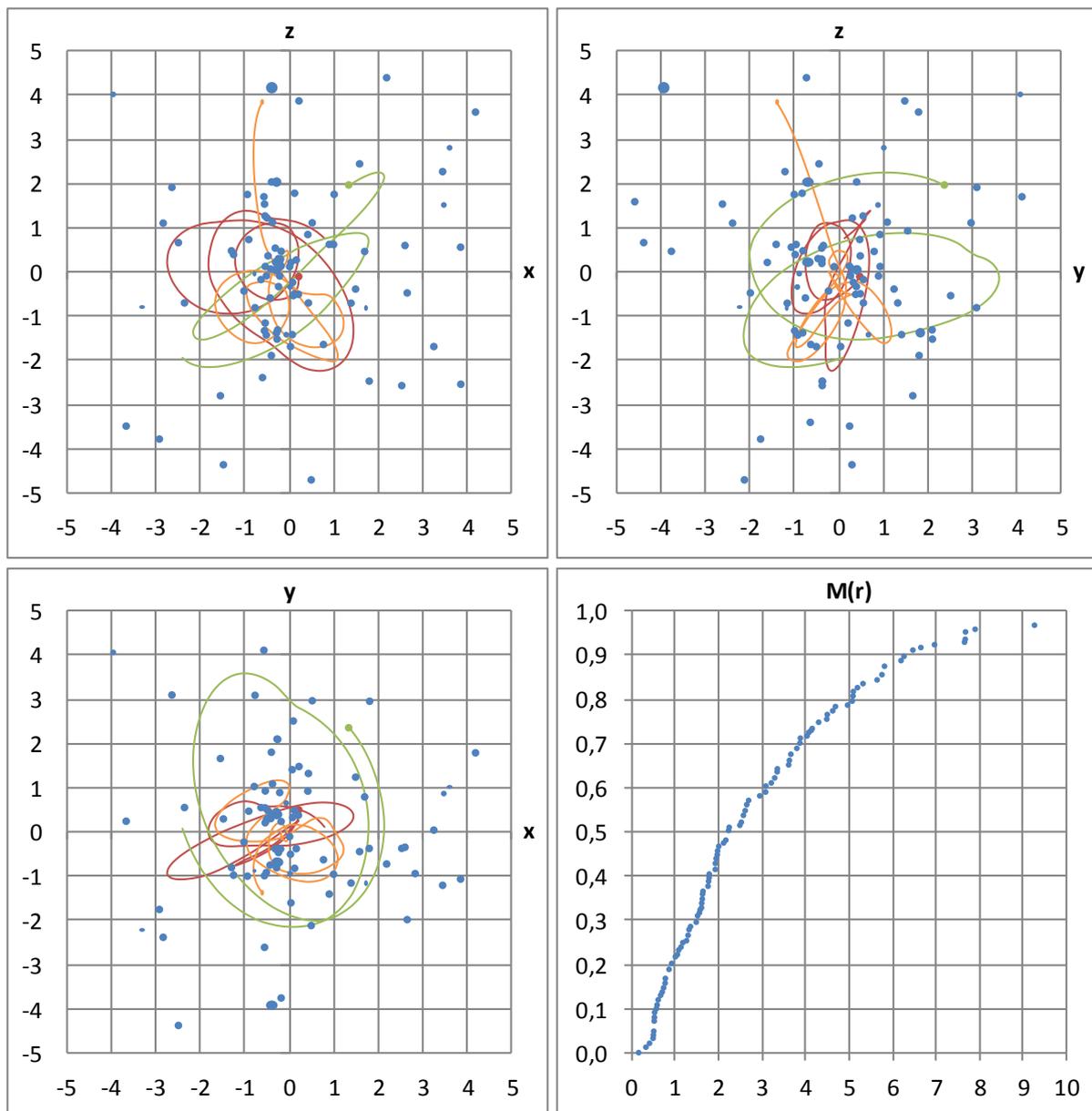


Abb. 2b: Beispiel 2 bei $t = 6$

Der anfängliche Zeitschritt $\Delta t = 0,0025$ verringert sich durch die Schrittweitensteuerung zeitweise bis auf $\Delta t = 0,0003125$. Da einige Massen größer sind, kommt es in deren Nähe zu höheren Beschleunigungen, so dass die Schrittweitensteuerung bei gleichem Parameter ϵ und gleichem Plummer-Radius δ zu kleineren Zeitschritten führt.

Beispiel 3 zeigt das Ergebnis einer anfänglichen Normalverteilung von 100 Massen der Größe 1 mit dem Skalenradius $r_S = 2$ und dem Abplattungsfaktor $f_A = 0,25$. Die anfänglichen Geschwindigkeiten sind normalverteilt um die Kreisgeschwindigkeiten mit dem Faktor $f_S = 0,1$. Die anfängliche Bewegungsrichtung ist räumlich unter Berücksichtigung des Abplattungsfaktors verteilt. Abb. 3a zeigt die Verteilung der Massen zum Startzeitpunkt.

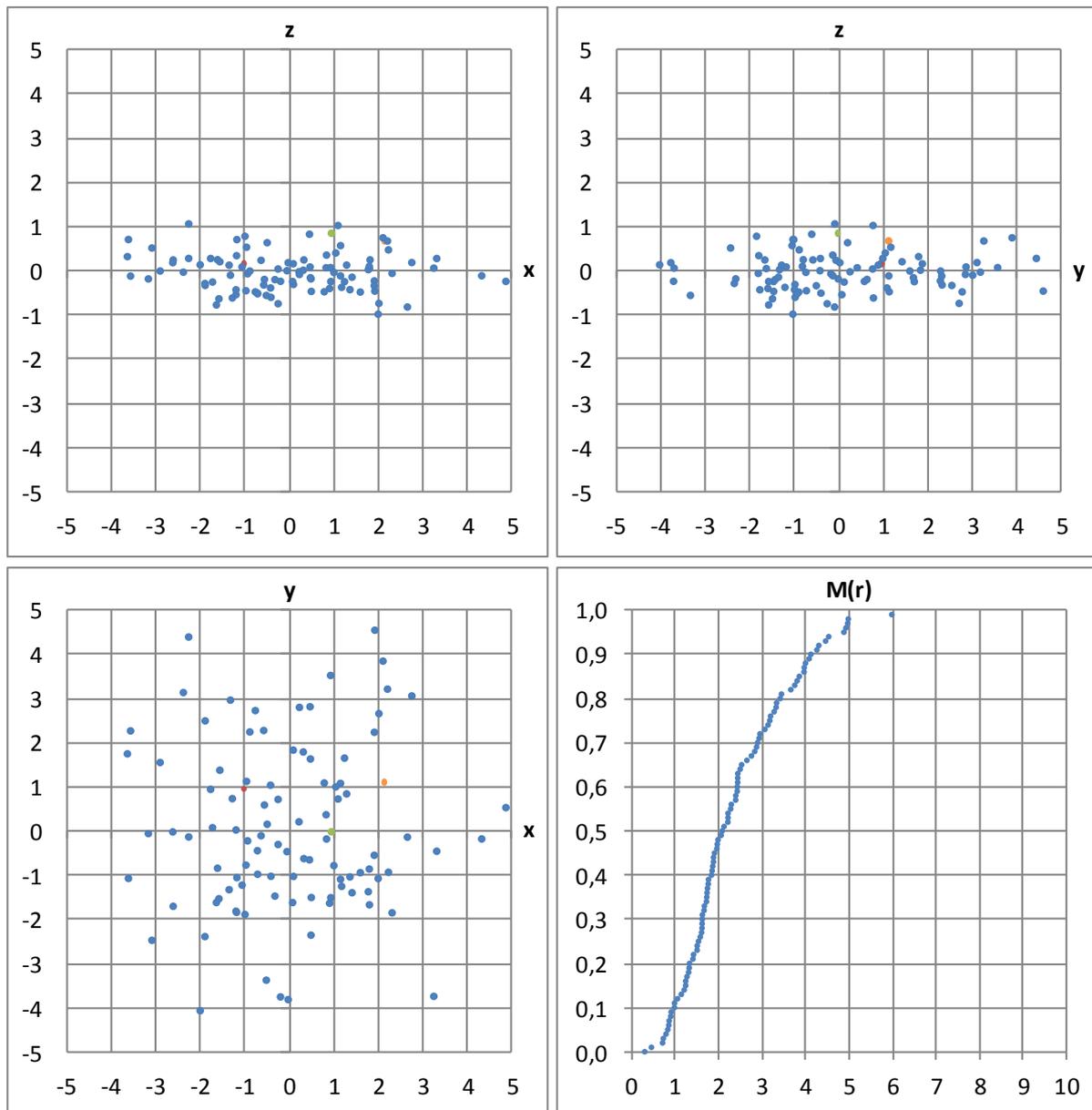


Abb. 3a: Beispiel 3 bei $t = 0$

Wie in den vorherigen Beispielen wurde der Plummer-Radius mit $\delta = 0,05$ angesetzt und das Schrittweitenkriterium mit $\varepsilon = 0,25$. Der anfängliche Zeitschritt $\Delta t = 0,0025$ verringert sich durch die Schrittweitensteuerung zeitweise bis auf $\Delta t = 0,000625$. Die nachfolgende Abbildung zeigt das Ergebnis nach 7,5 Zeiteinheiten.

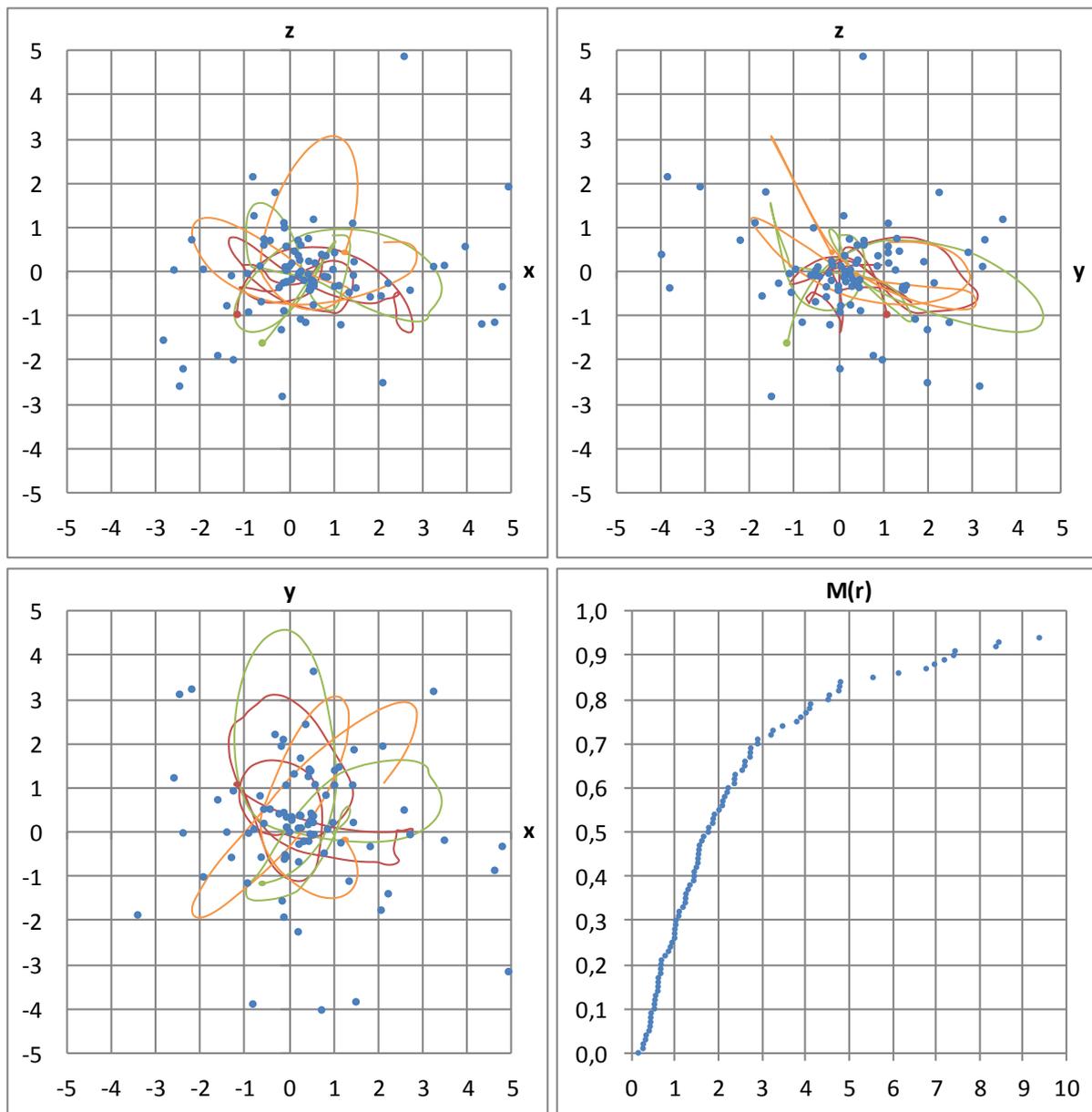


Abb. 3b: Beispiel 3 bei $t = 7,5$

Zusätzlich zu den Positionen aller Massen sind drei zufällig ausgewählte Bahnen eingezeichnet.

Wie zu erwarten, ist diese Konfiguration aufgrund der zufällig verteilten Geschwindigkeiten nicht so stabil wie Beispiel 1. Darüber hinaus spielt die Abplattung eine Rolle, da dadurch die Abstände zwischen den Massen geringer sind und es häufiger zu engen Begegnungen kommt.

Bei $t = 7,5$ hat sich der Abplattungsfaktor von $f_A = 0,25$ auf $0,35$ erhöht, gemessen am Verhältnis der Standardabweichungen. Das bedeutet, die Abplattung hat sich verringert, ist aber noch deutlich vorhanden. Gleichzeitig zeigt die radiale Massenverteilung sowohl eine Konzentration Richtung Zentrum (50 % innerhalb von $r = 1,76$ statt $r = 2,08$) als auch eine Ausbreitung nach außen (15 % außerhalb von $r = 5$ statt 1 %).

Beispiel 4 zeigt als Spezialfall der N-Körper-Simulationen eine zufallsgenerierte dreidimensionale Dreikörper-Simulation. Dazu wurden mit Hilfe der Gammaverteilung drei Massen generiert: $m_1 = 39,773$ (rot), $m_2 = 41,154$ (grün) und $m_3 = 19,073$ (orange). Deren Positionen wurden zufällig innerhalb einer Kugel mit dem Radius 3 verteilt und deren Geschwindigkeiten normalverteilt in x -, y -, und z -Richtung mit der Standardabweichung 2,5.

Um die Bahnen exakt zu berechnen, wurde der Plummer-Radius $\delta = 0$ gesetzt. Das Ergebnis nach 6 Zeiteinheiten ist in Abb. 4 zu sehen.

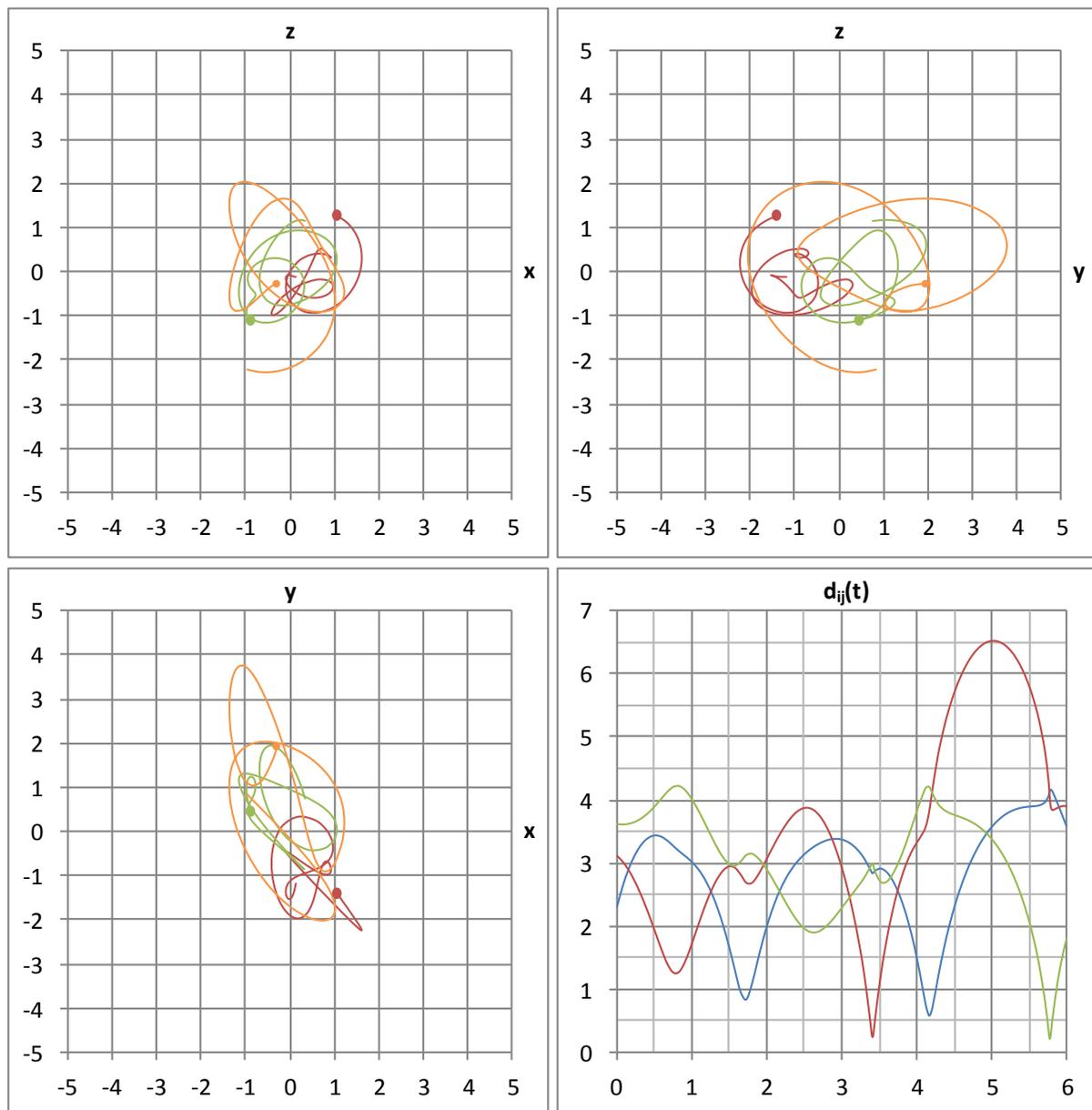


Abb. 4: Beispiel 4 bei $t = 6$

Das vierte Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf der Abstände zwischen den Massen. Zwischen allen drei Massen kommt es jeweils mindestens zu einer engen Zweierbegegnung. Dadurch verringert sich der anfängliche Zeitschritt $\Delta t = 0,0025$ aufgrund der Schrittweiten-

steuerung mit $\varepsilon = 0,25$ zeitweise bis auf $\Delta t = 0,000156$. Eine Halbierung von ε liefert keine Erhöhung der Genauigkeit der Bahnberechnung.

Beispiel 5 ist bis auf die Zufallszahlen identisch mit Beispiel 4. Hier sind die Massen annähernd gleich: $m_1 = 36,723$ (rot), $m_2 = 32,872$ (grün) und $m_3 = 30,405$ (orange). Die Abplattung, die Abb. 5 zeigt, ist zufällig entstanden.

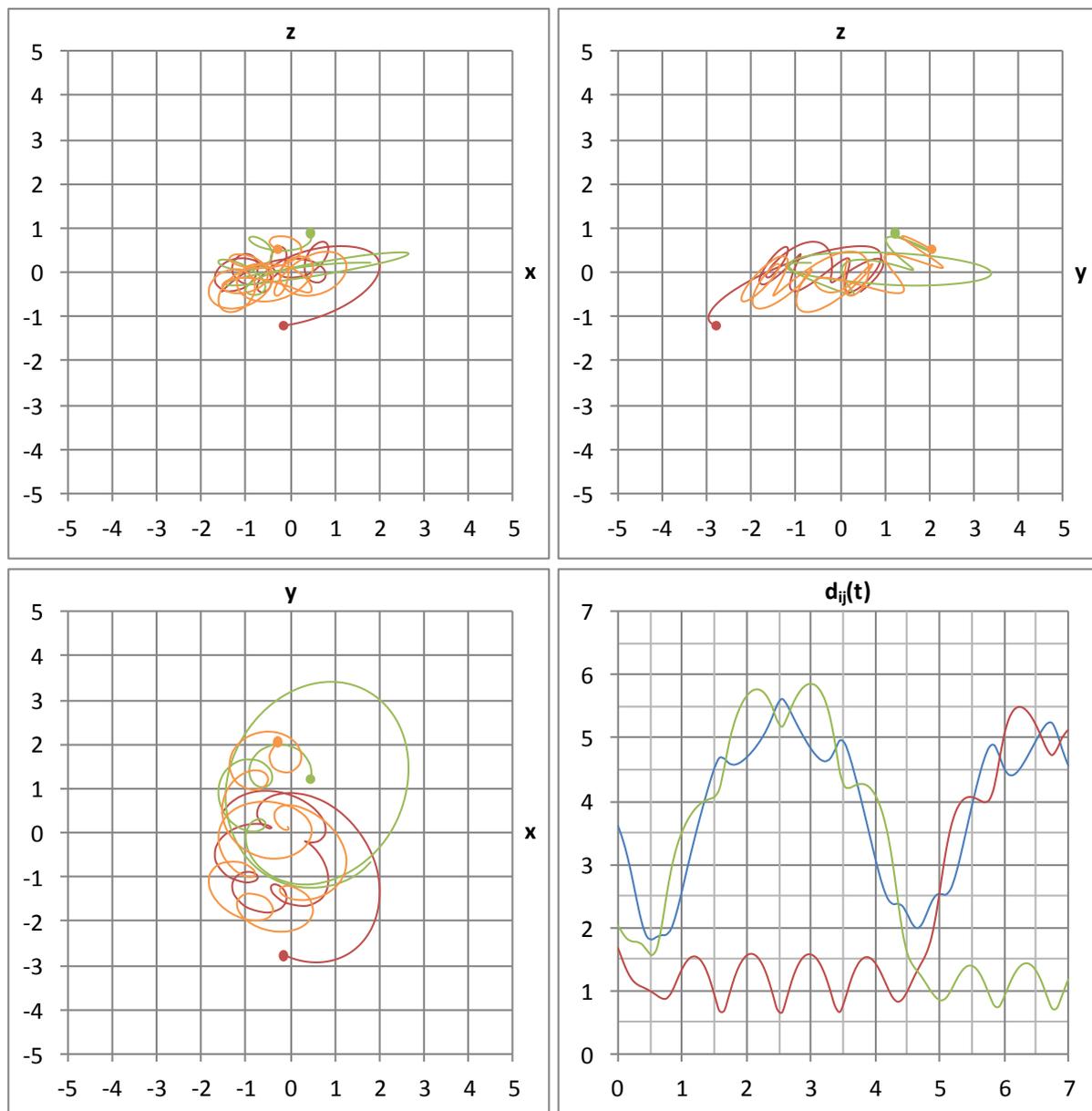


Abb. 5: Beispiel 5 bei $t = 7$

Das Interessante an diesem Beispiel ist, dass zuerst die Massen 1 und 3 einander eng umkreisen, nach einer engeren Begegnung aller drei Massen dann die Massen 2 und 3. Besonders gut ist das im vierten Diagramm, dem Abstandsdiagramm, zu sehen.

Im weiteren Verlauf (ohne Abbildung), kommt es erneut zu einer Dreierbegegnung, nach der dann die Massen 1 und 2 einander eng umkreisen und Masse 3 weit weg geschleudert wird.

Dreidimensionale Visualisierung

Die drei Ansichten der Bahnen aus den verschiedenen Achsenrichtungen geben nur einen unzureichenden Eindruck der räumlichen Verhältnisse. Um diesen zu verbessern, kann die Ansicht gedreht werden. Ausgehend von der xz -Ansicht erfolgt die Drehung zuerst um einen beliebigen Winkel φ um die z -Achse:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$z' = z$$

Danach erfolgt die Drehung um einen beliebigen Winkel ϑ um die neue x -Achse:

$$x'' = x' \cos \vartheta - z' \sin \vartheta$$

$$z'' = y' \sin \vartheta + z' \cos \vartheta = x \sin \varphi \sin \vartheta + y \cos \varphi \sin \vartheta + z \cos \vartheta$$

Dies ergibt die neue xz -Ansicht. Wird nun die Drehung um φ und ϑ animiert, erhält man einen guten räumlichen Eindruck.