

# Infektionssimulationen

Im Folgenden wird ein einfaches Modell zur Simulation von Infektionsgeschehen entwickelt und anhand von Beispielen erläutert. Als konkreter Anwendungsfall wird die Omikron-Welle der COVID-19-Pandemie Anfang 2022 herangezogen (neueste Ergebnisse siehe Seite 8 f.).

## Das Modell

Ziel ist, eine Infektionswelle mit einem möglichst einfachen und nachvollziehbaren Ansatz zu simulieren.

Die Simulation beruht darauf, als Zeiteinheit (Periode) die Dauer, in der eine Person **infektiös** ist, zu verwenden. Wie infektiös eine infizierte Person in dieser Periode ist, wird durch den R-Wert angegeben, der beziffert, wie viele andere Personen eine infektiöse Person infizieren kann.

Sei  $X_k$  der Prozentsatz der gesunden, d.h. noch nicht infizierten Personen, zu **Beginn** der Periode  $k$ ,  $Y_k$  der Prozentsatz der **innerhalb** der Periode  $k$  neu infizierten Personen und  $Z_k$  der Prozentsatz aller genesenen (oder verstorbenen) Personen am **Ende** der Periode  $k$ . Es wird angenommen, dass Genesene nicht erneut infiziert werden können. Dann ist in der nächsten Periode

$X_{k+1} = 100\% - Y_k - Z_k$  Von den ursprünglichen 100% Gesunden werden die Infizierten und alle bereits Genesenen abgezogen.

$Y_{k+1} = R \times X_{k+1} \times Y_k$  Der Prozentsatz der neu Infizierten ergibt sich aus dem R-Wert, dem Prozentsatz der Gesunden und dem Prozentsatz der in der vorherigen Periode Infizierten und damit noch Infektiösen.

$Z_{k+1} = Y_k + Z_k$  Die in der letzten Periode Infizierten werden am Ende der folgenden Periode den Genesenen hinzugerechnet. Entscheidend ist nur, dass diese Personen nicht mehr infektiös sind.

Alle Angaben beziehen sich auf die Grundgesamtheit der Personen, die infiziert werden können, also nicht bereits zum Start der Simulation immunisiert sind. Während der Simulation wird nur die Immunisierung durch eine überstandene Infektion berücksichtigt.

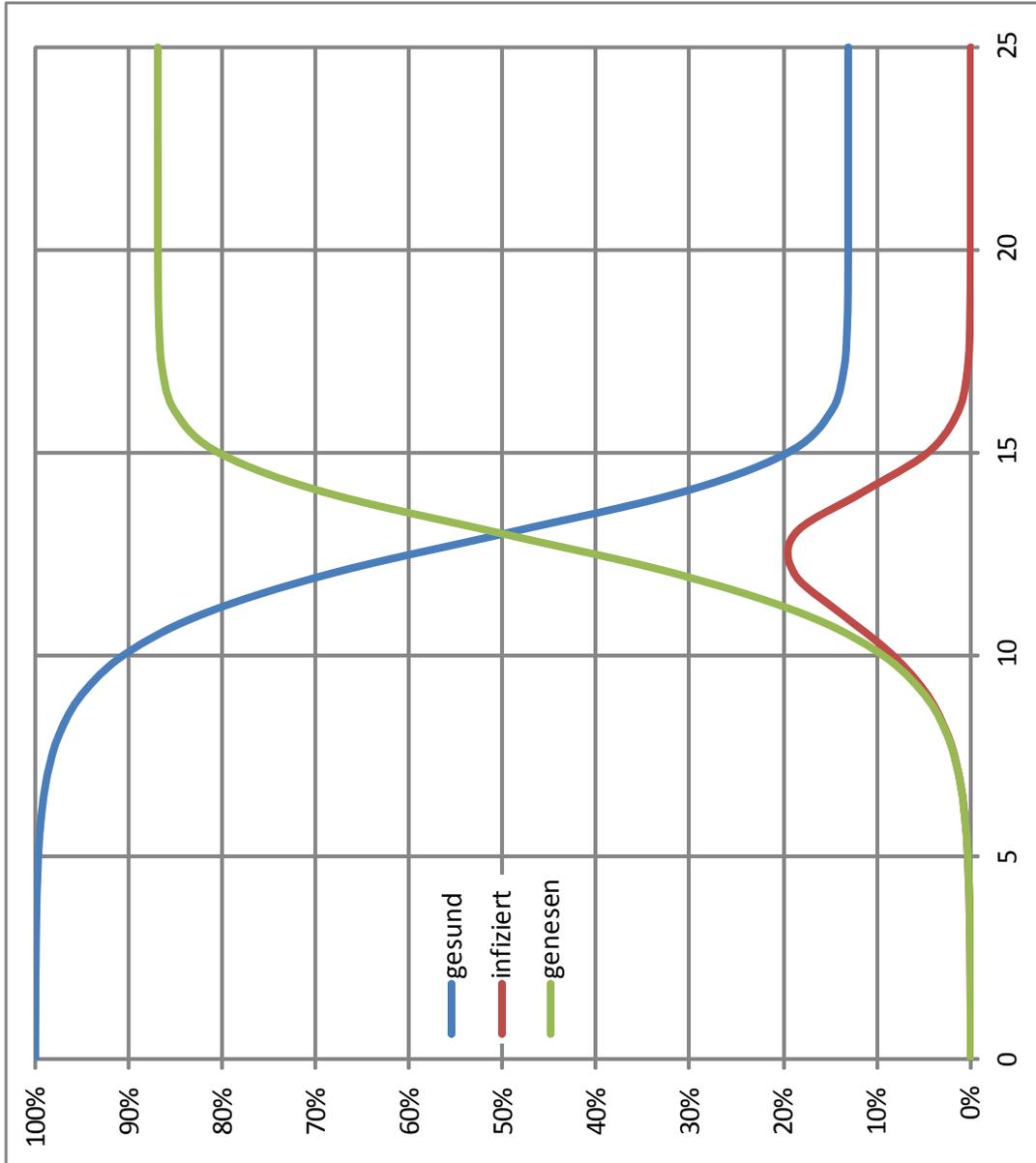
## Beispiele

Im auf der nachfolgenden Seite dargestellten Beispiel 1 beginnt die Simulation mit 100% Gesunden, von denen in der Periode Null 0,01% infiziert werden. Dieser Wert ist willkürlich, ändert aber nichts an den Ergebnissen, sondern bestimmt nur den Nullpunkt der Zeitachse.

In diesem Beispiel wird der R-Wert mit 2 angesetzt. Der Prozentsatz der neu Infizierten steigt anfänglich exponentiell an und erreicht das Maximum von knapp 19% in Periode 12/13. Dann fällt dieser Prozentsatz ähnlich schnell wieder ab, wie er angestiegen ist.

**Beispiel 1: R-Wert 2**

Periode	gesund	infiziert	genesen
0	100,00%	0,01%	0,00%
1	99,99%	0,02%	0,01%
2	99,97%	0,04%	0,03%
3	99,93%	0,08%	0,07%
4	99,85%	0,16%	0,15%
5	99,69%	0,32%	0,31%
6	99,37%	0,63%	0,63%
7	98,74%	1,25%	1,26%
8	97,49%	2,43%	2,51%
9	95,06%	4,63%	4,94%
10	90,43%	8,37%	9,57%
11	82,06%	13,74%	17,94%
12	68,32%	18,77%	31,68%
13	49,54%	18,60%	50,46%
14	30,94%	11,51%	69,06%
15	19,43%	4,47%	80,57%
16	14,96%	1,34%	85,04%
17	13,62%	0,36%	86,38%
18	13,26%	0,10%	86,74%
19	13,16%	0,03%	86,84%
20	13,13%	0,01%	86,87%
21	13,13%	0,00%	86,87%
22	13,12%	0,00%	86,88%
23	13,12%	0,00%	86,88%
24	13,12%	0,00%	86,88%
25	13,12%	0,00%	86,88%



Im Verlauf steigt der Prozentsatz der Genesenen bis auf knapp 87%. Bei dieser „Durchseuchung“ greift die sogenannte „Herdenimmunität“. Die Infektiösen treffen praktisch nicht mehr auf Gesunde, die sie infizieren können. So bleiben gut 13% von einer Infektion verschont. Die Abhängigkeit dieser Prozentsätze vom R-Wert zeigt sich im zweiten Beispiel auf der nachfolgenden Seite.

## **Anwendungsfall Omikron**

Der R-Wert von 2 besagt, dass in einer Periode jeder Infektiöse durchschnittlich 2 Gesunde infiziert. Bei der COVID-19-Infektion gehen wir von einer Periode von 2 Wochen aus, die ein Infizierter infektiös ist. Das bedeutet, dass sich die Inzidenz alle 2 Wochen verdoppelt. Diese Situation liegt Mitte Januar 2022 mit der Omikron-Variante in etwa vor.

Der R-Wert, der vom RKI ausgewiesen wird, bezieht sich auf einen Zeitraum von 4 Tagen. Der hier verwendete R-Wert von 2 entspricht deshalb einem R-Wert des RKI von ca. 1,2, dem Wert der für Anfang/Mitte Januar 2022 ermittelt wurde.

In der KW 3 liegt die 7-Tage-Inzidenz bei etwa 800 Infizierten pro 100.000 Einwohner. Dieser Wert muss auf den in der Simulation verwendeten Prozentsatz von akut Infizierten umgerechnet werden. Da die angesetzte Periode 2 Wochen umfasst, muss der Wert verdoppelt werden. Außerdem muss eine Annahme über die zu betrachtende Grundgesamtheit gemacht werden. Geht man davon aus, dass 65% der Bevölkerung durch Impfungen oder überstandene Infektionen immunisiert sind oder sich anderweitig so gut schützen, dass eine Infektion unwahrscheinlich ist, umfasst die Grundgesamtheit der Simulation 35% der Bevölkerung. Damit bezieht sich die Inzidenz nur auf 35.000 Personen, die infiziert werden können. Daraus ergibt sich in der betreffenden Periode ein Prozentsatz von ca. 4,6%. Das bedeutet, die KW 3 liegt in Periode 9 der Simulation.

Der Höhepunkt der Infektionswelle ist in der Simulation in Periode 12/13 erreicht; das entspricht in etwa der KW 10, also Mitte März 2022. Bis dahin vervierfacht sich der Prozentsatz der akut Infizierten in der Simulation, was einer 7-Tage-Inzidenz von über 3.000 entsprechen würde. Das Ende der Infektionswelle kann in Periode 17 angenommen werden, wenn der Prozentsatz der akut Infizierten deutlich unter 1% liegt; das entspricht in etwa der KW 19, also Mitte Mai 2022.

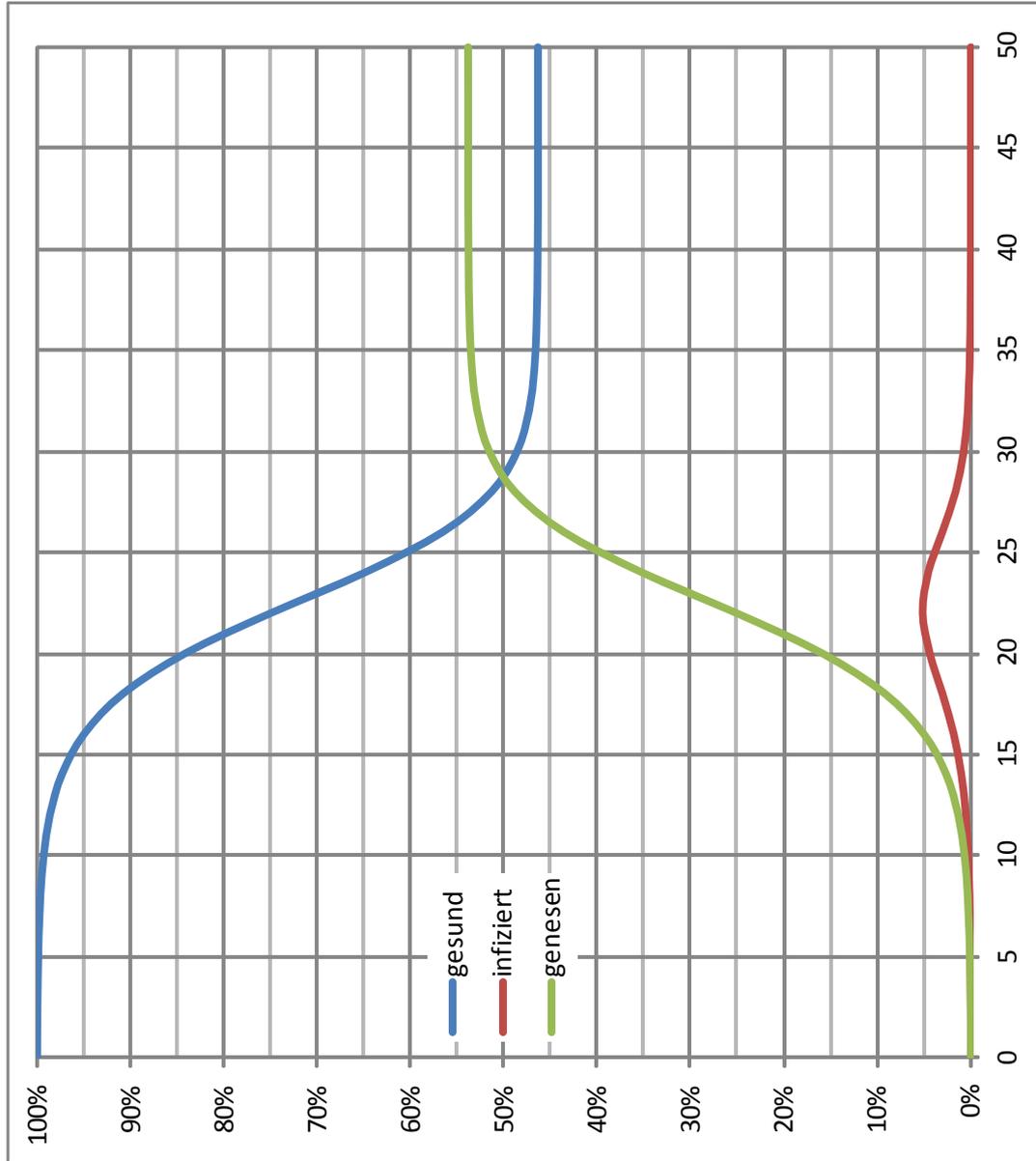
Die hier gemachten Annahmen sind mit erheblichen Ungenauigkeiten behaftet. So ist der Anteil der Bevölkerung, der mit Omikron infiziert werden kann, wahrscheinlich höher, andererseits gibt es aber auch eine Dunkelziffer bei den Infektionen, so dass die tatsächliche Inzidenz höher ist als angenommen. Diese beiden Effekte heben sich zumindest teilweise gegenseitig auf. Auch wird die Zunahme der Immunisierung durch Impfungen nicht berücksichtigt.

## **Alternatives Szenario**

Das nachfolgende Beispiel 2 zeigt den Einfluss des R-Werts auf den Verlauf des Infektionsgeschehens und den „Durchseuchungsgrad“.

### Beispiel 2: R-Wert 1,4

Periode	gesund	infiziert	genesen
0	100,00%	0,01%	0,00%
2	99,98%	0,02%	0,02%
4	99,93%	0,04%	0,07%
6	99,84%	0,07%	0,16%
8	99,66%	0,15%	0,34%
10	99,31%	0,28%	0,69%
12	98,63%	0,54%	1,37%
14	97,35%	1,01%	2,65%
16	94,97%	1,82%	5,03%
18	90,78%	3,01%	9,22%
20	84,06%	4,36%	15,94%
22	74,84%	5,09%	25,16%
24	64,78%	4,51%	35,22%
26	56,46%	3,01%	43,54%
28	51,20%	1,61%	48,80%
30	48,47%	0,76%	51,53%
32	47,20%	0,34%	52,80%
34	46,64%	0,14%	53,36%
36	46,41%	0,06%	53,59%
38	46,31%	0,03%	53,69%
40	46,26%	0,01%	53,74%
42	46,25%	0,00%	53,75%
44	46,24%	0,00%	53,76%
46	46,23%	0,00%	53,77%
48	46,23%	0,00%	53,77%
50	46,23%	0,00%	53,77%



Durch den niedrigeren R-Wert von 1,4 verdoppelt sich in etwa die „Länge“ der Welle, während ihre „Höhe“ nur etwa ein Viertel beträgt. Die „Herdenimmunität“ tritt hier schon bei einer „Durchseuchung“ von unter 54% ein und gut 46% der Grundgesamtheit bleiben von einer Infektion verschont.

Dabei muss man berücksichtigen, dass beim Beispiel der Omikron-Welle eine Grundgesamtheit von nur 35% der Gesamtbevölkerung angesetzt wurde. Die „Herdenimmunität“ tritt also in diesem Beispiel ein, wenn 84% der Gesamtbevölkerung durch Impfung oder überstandene Infektion immunisiert sind. Mit den Daten von Beispiel 1 liegt dieser Wert sogar über 95%.

Um den R-Wert von 1,4 auf die Omikron-Welle anwenden zu können, müsste man von einer Periode von nur einer Woche ausgehen. Das könnte durchaus richtig sein, wenn man annimmt, dass infektiöse Personen danach isoliert werden und niemanden mehr infizieren können.

Wir wären dann in der KW 3 in etwa in Periode 17 und der Höhepunkt der Welle in Periode 22 wäre dann in KW 8, also Ende Februar 2022. Bis dahin würde die 7-Tage-Inzidenz auf etwa 1.700 steigen. Das Ende der Welle könnte in Periode 31 angesetzt werden, was KW 17 entspräche, also Ende April.

Das zweite Szenario kommt den Aussagen des bekannten Virologen Prof. Dr. J. Schmidt-Chanasit näher, der sich in der KW 3 dahin gehend geäußert hat, dass für eine sichere Beurteilung der Verlauf der derzeitigen Welle in den nächsten ein bis zwei Wochen entscheidend sei, und gesagt hat: „Momentan gehe ich davon aus, dass wir in den nächsten ein bis zwei Monaten aber damit durch sind.“<sup>1</sup>

Die gezeigten Beispiele veranschaulichen die grundsätzlichen Mechanismen einer Infektionswelle recht gut. Für eine brauchbare Vorhersage des weiteren Verlaufs der konkreten Omikron-Welle sind die gemachten Annahmen bezüglich der relevanten Parameter aber offensichtlich zu ungenau.

## **Kurvenanpassung**

Wir gehen deshalb so vor, dass wir den bisherigen zeitlichen Verlauf der Infektionswelle als Basis dafür verwenden, die Modellparameter zu bestimmen.

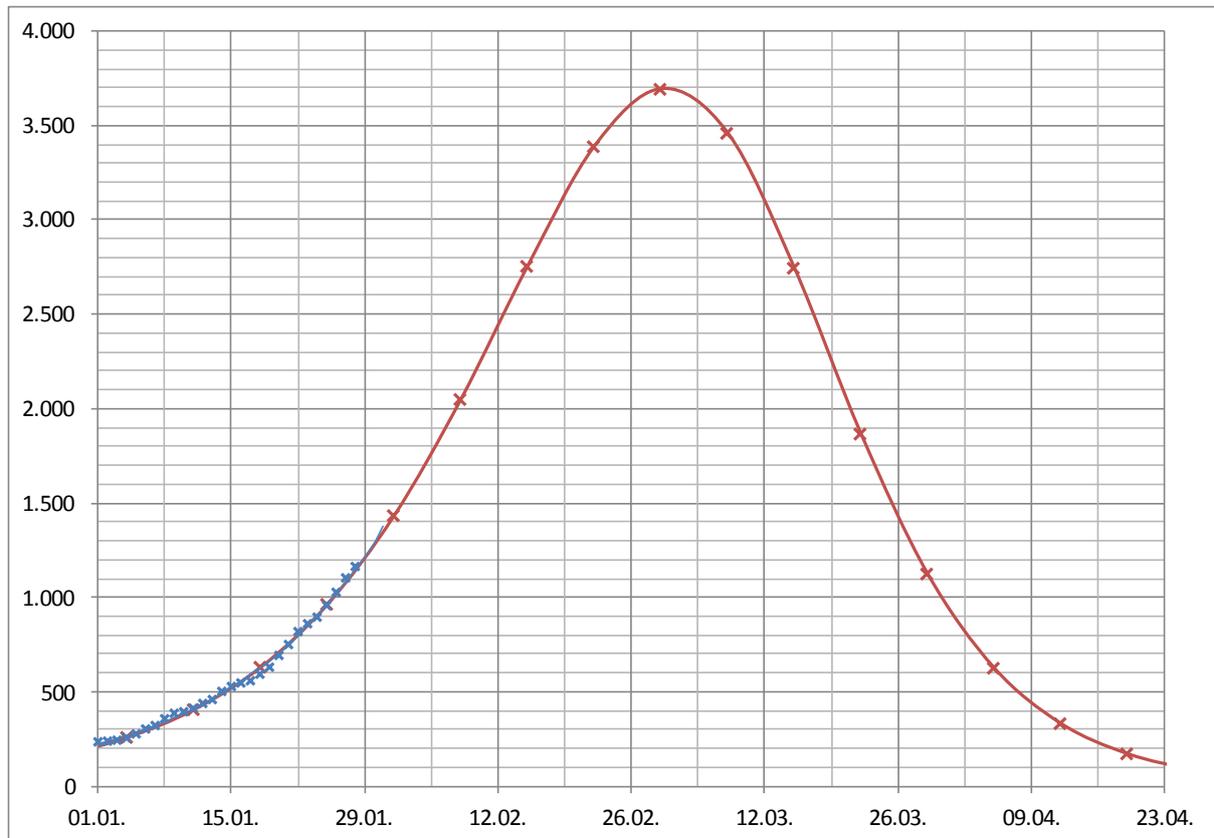
Die nachfolgende Abbildung zeigt den Verlauf der 7-Tage-Inzidenzen für Deutschland insgesamt vom 01.01.2022 bis 28.01.2022 (blaue Kreuze) und zusätzlich das in diesem Zeitraum exponentielle Wachstum als Regressionskurve (blaue Linie). Die Regressionsanalyse ergibt eine Verdoppelung der Inzidenzen alle 11,4 Tage.

In derselben Abbildung ist ein Infektionsverlauf nach dem oben beschriebenen Modell eingezeichnet (rote Kreuze und Kurve). Die Modellparameter sind so angepasst worden, dass eine möglichst große Übereinstimmung mit dem beobachteten bisherigen Verlauf erzielt

---

<sup>1</sup> Hamburger Morgenpost vom 21.01.2022

wird. Die Anpassung ergibt eine infektiöse Periode von 7 Tagen und einen R-Wert von 1,6, sowie einen Prozentsatz der infizierbaren Bevölkerung von 38,6%.



Modellanpassung an den bisherigen Verlauf der Infektionswelle in Deutschland

**Damit ergibt die Simulation eine maximale 7-Tage-Inzidenz von etwa 3.700 um den 1. März 2022 herum und ein Ende der Welle Mitte/Ende April 2022.**

Im Verlauf wird sich insgesamt etwa ein Viertel der Bevölkerung mit Omikron infizieren.

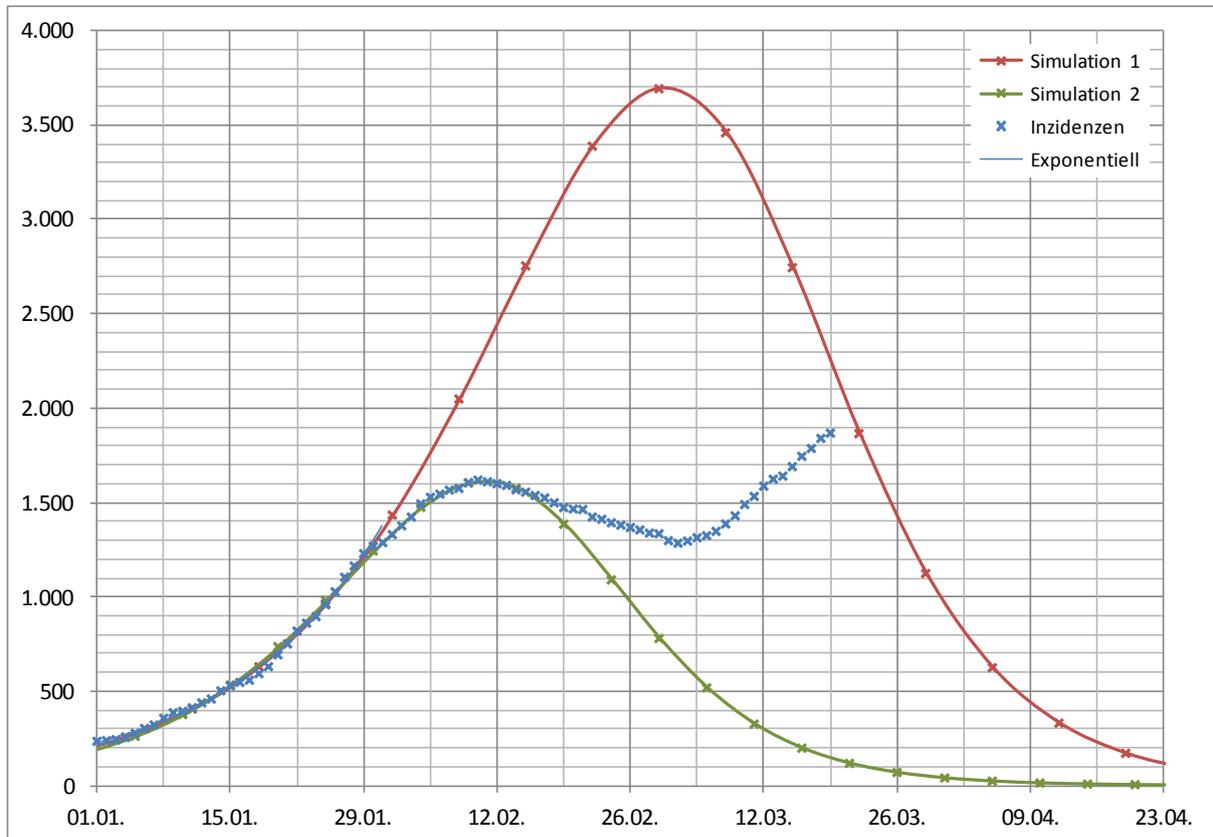
Auch dieses Ergebnis ist mit einer nicht zu vernachlässigenden Ungenauigkeit behaftet, da die Anpassung des Modells auf einer frühen Phase der Infektionswelle beruht, in der noch ein exponentielles Wachstum vorliegt. In wenigen Wochen wird sich zeigen, ob die Vorhersagen auf der Basis des hier verwendeten einfachen Modells tragfähig sind.

Wer sich für den aktuellen Stand der Wissenschaft zu diesem Thema interessiert, sei z.B. auf den Artikel von Prof. Dr. [G. Bärwolff „Modeling of COVID-19 propagation with compartment models“<sup>2</sup>](#) verwiesen.

<sup>2</sup> Mathematische Semesterberichte **68**, 181-219 (2021)

## Überprüfung der Simulation anhand des tatsächlichen Inzidenzverlaufs

Die nachfolgende Abbildung zeigt den weiteren Verlauf der 7-Tage-Inzidenzen (blaue Kreuze) und zusätzlich zu der Simulation vom 30.01.2022 (rot) eine Simulation (grün), die an den Verlauf bis 14.02.2022 nach der [Methode der kleinsten Quadrate](#) angepasst wurde.<sup>3</sup>



Vergleich der Simulationen vom 30.01.2022 und 15.02.2022 mit dem tatsächlichen Inzidenzverlauf

Die Anpassung ergibt eine infektiöse Periode von 5 Tagen, einen R-Wert von 1,494 und einen Prozentsatz der infizierbaren Bevölkerung von **16,17%**, wovon im Verlauf etwa 61,4% auch infiziert werden, entsprechend ca. **9,9%** der Gesamtbevölkerung.<sup>4</sup>

Der weitere Verlauf der gemeldeten Inzidenzen weicht allerdings erheblich von dieser Simulation ab. Die Inzidenzen sind viel langsamer als erwartet gefallen und steigen seit Anfang März sogar wieder an. Die Gründe hierfür sind:

- Anfang Februar wurde die Teststrategie geändert, weil die Laborkapazitäten an ihre Grenzen gestoßen sind. Es ist deshalb von einer höheren Dunkelziffer nicht erfasster Infektionen auszugehen.
- Ab Mitte Februar wurden die Schutzmaßnahmen gegen Infektionen sukzessive gelockert. Dies war – kurz nach dem Höhepunkt der Welle – offensichtlich viel zu früh.

<sup>3</sup> Aufgrund der diskreten Struktur des Modells mussten die ersten Schritte der Anpassung manuell erfolgen. Für die finale Feinanpassung der Parameter wurde dann der Excel Solver verwendet.

<sup>4</sup> Die **rot** markierten Zahlen wurden nachträglich um den Faktor 5/7 korrigiert (Stand: 22.10.2022)

- Der Omikron-Subtyp BA.2, der ansteckender ist als der ursprüngliche Subtyp BA.1, hat zunehmend an Bedeutung gewonnen und dominiert seit Anfang März.

Durch den Wiederanstieg der Inzidenzen werden Werte erreicht, die wieder mehr mit Simulation 1 übereinstimmen als mit Simulation 2. Der weitere Verlauf mit der Problematik der zwei Subtypen wird im Abschnitt [Simulation der Überlagerung zweier Wellen](#) behandelt.

## Vergleich mit den Modellrechnungen des RKI

Das RKI hat am 03.02.2022 einen [Bericht zur Abschätzung der Infektionswelle durch die SARS-CoV-2 VOC Omikron](#) veröffentlicht. Mit den verwendeten hochkomplexen Modellen wird der Höhepunkt der Welle für Mitte Februar 2022 errechnet, wobei die Streuung bezüglich der „Kammhöhe“ der Welle relativ groß ist (zwischen 180.000 und 450.000 Infektionen pro Tag, entsprechend einer 7-Tage-Inzidenz zwischen 1.500 und 3.800).

Charakteristisch für die Modelle des RKI sind Generationszeiten von 3 bis 5 Tagen, während die damit vergleichbare hier verwendete Periode in Simulation 1 aufgrund der Kurvenanpassung an den exponentiellen Anstieg der Inzidenzen in der frühen Phase der Welle mit 7 Tagen deutlich länger ist.

Die Anpassung an den weiteren Inzidenzverlauf für Simulation 2 ergibt dann eine Periode von 5 Tagen und auch sonst stimmt Simulation 2 gut mit den Ergebnissen der Modellrechnungen des RKI überein. Die Modelle des RKI zeigen allerdings ein langsames Auslaufen der Welle, was dem tatsächlichen Verlauf näher kommt. Aber auch die Modellrechnungen des RKI konnten den Wiederanstieg der Infektionen im März nicht vorhersagen.

## Simulation der Überlagerung zweier Wellen

Die hier verwendete Diskretisierung des Infektionsmodells auf der Basis der Perioden erlaubt nur eine eingeschränkte Überlagerung zweier Simulationen: Beide Perioden müssen gleich sein und der Abstand muss ein Vielfaches davon sein.

Die Summe zweier Simulationen mit Perioden von 5 Tagen und einem Abstand von 45 Tagen wurde nach der [Methode der kleinsten Quadrate](#) an den Verlauf der gemeldeten Inzidenzen<sup>5</sup> angepasst. Dadurch wurden die folgenden Parameter bestimmt:

Simulation 1 (BA.1): R-Wert = 1,51  
Anteil = 13,8%

Simulation 2 (BA.2): R-Wert = 1,52  
Anteil = 16,2%

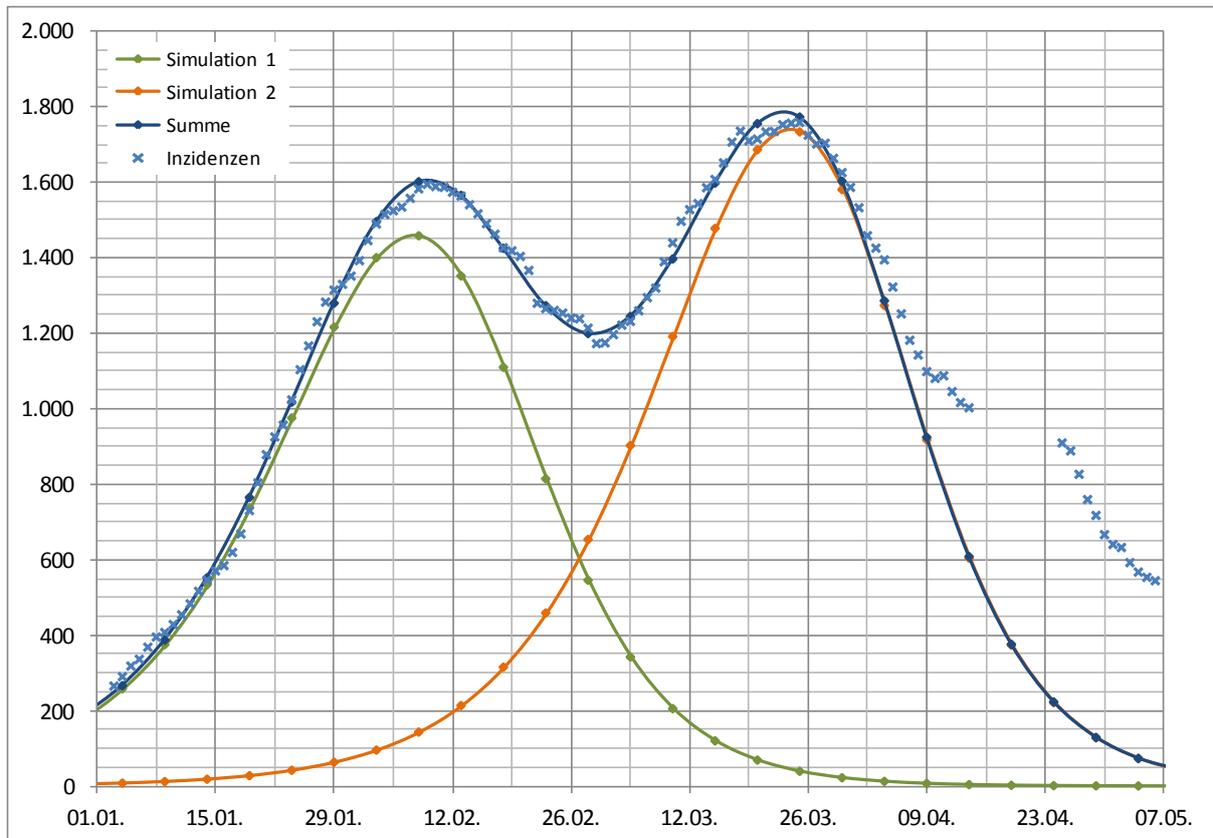
Der hier ausgewiesene Anteil gibt den für die jeweilige Simulation relevanten infizierbaren Teil der Bevölkerung an. Die Auswertung der Simulationen ergibt, dass **im Verlauf insgesamt ca. 19% der Bevölkerung mit Omikron (BA.1 + BA.2) infiziert werden.**<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup> Für diese neueren Simulationen wurde eine von den vorherigen Simulationen geringfügig abweichende Datenbasis verwendet (Quelle: RKI).

<sup>6</sup> Die rot markierten Zahlen wurden nachträglich um den Faktor 5/7 korrigiert (Stand: 22.10.2022)

Die nachfolgende Abbildung zeigt das Ergebnis der Simulationen sowie die zugrunde liegenden gemeldeten Inzidenzen (erratische Werte um Ostern ignoriert).



Überlagerung zweier Simulationen mit Anpassung der Summe an den Inzidenzverlauf bis 31.03.2022

Die Übereinstimmung zwischen dem Modell (blaue Kurve) und dem Inzidenzverlauf (hellblaue Kreuze) ist sehr gut, zumindest bis Ende März 2022.

Es ist jedoch offensichtlich, dass sich der Inzidenzverlauf im **April 2022** aufgrund der **verfrühten Aufhebung der meisten Infektionsschutzmaßnahmen** vom Ergebnis der Simulation **entfernt** und die Omikron-Welle **unnötigerweise länger dauert**, als nach der Simulation zu erwarten wäre.

## Fazit

Mit dem sehr einfachen hier verwendeten Modell ist es durchaus möglich, den prinzipiellen Verlauf einer Infektionswelle nachzubilden. Sogar die Überlagerung zweier Infektionswellen kann – wenn auch mit Einschränkungen – simuliert werden. Die Anpassung der Modellparameter an den tatsächlichen Infektionsverlauf ergibt eine gute Übereinstimmung.

Das Modell ist jedoch nicht dazu geeignet, aus einer frühen Phase einer Infektionswelle brauchbare Vorhersagen über den weiteren Verlauf zu generieren. Auch kann das Modell Veränderungen der Randbedingungen (z.B. Lockerung der Schutzmaßnahmen) nicht berücksichtigen.

## Anhang: Vergleich verschiedener R-Werte

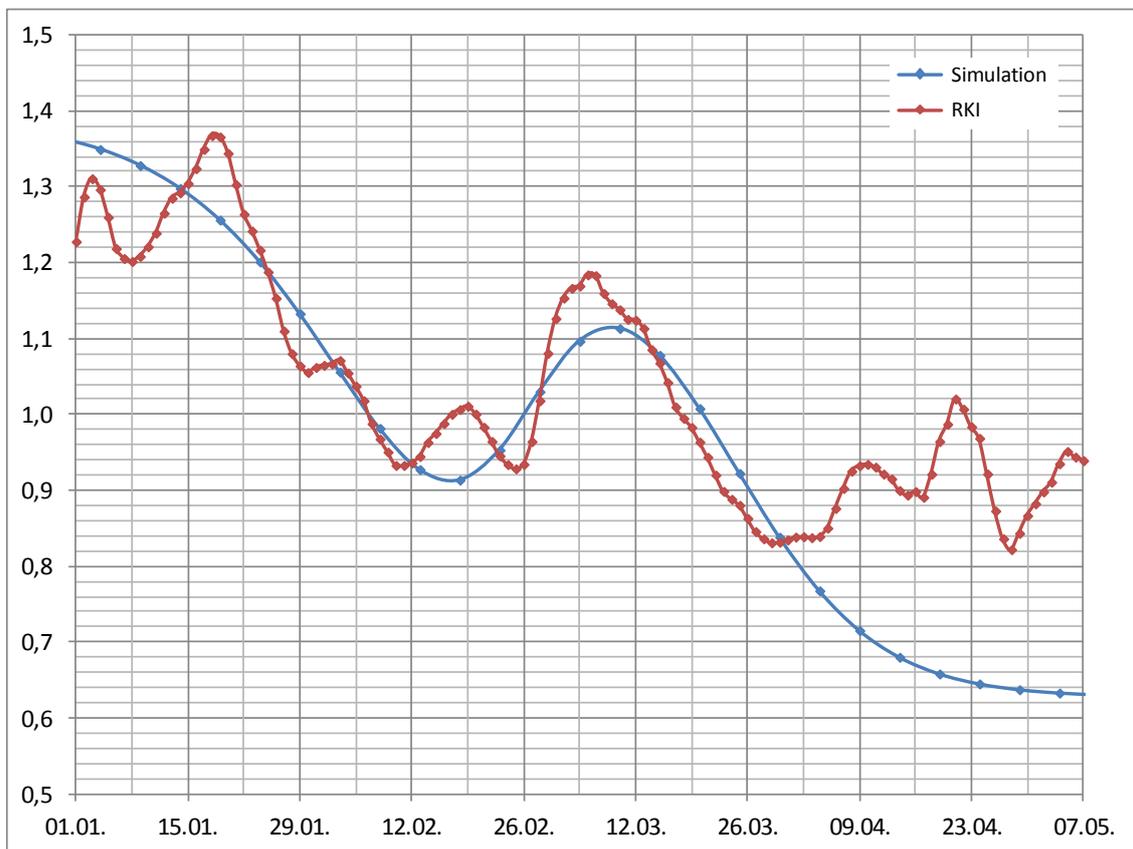
Bei den hier beschriebenen Simulationen ist der R-Wert ein konstanter Modellparameter, der die Infektosität einer Virus-Variante beschreibt. Wie schnell sich eine Infektion tatsächlich ausbreitet, wird durch den effektiven R-Wert beschrieben:

$$R_{\text{eff}} = Y_{k+1}/Y_k$$

Dies ist das Verhältnis der Zahl der Infizierten in zwei aufeinanderfolgenden Perioden. Im Gegensatz dazu bezieht sich der R-Wert, den das RKI veröffentlicht, auf einen Zeitabstand von 4 Tagen. Wenn P die Periode der Simulation ist, ist der entsprechende Vergleichswert:

$$R_4 = R_{\text{eff}}^{4/P}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Vergleich der aus der aktuellen Simulation (s. Seite 9) berechneten Werte mit denen des RKI.



Effektiver R-Wert  $R_4$  der Simulation im Vergleich zum R-Wert des RKI

Bis Ende März ist die Übereinstimmung gut, aber wie bereits bei den Inzidenzen zeigt sich ab April eine deutliche Abweichung der R-Werte von der Simulation, die die weitgehende Aufhebung der Infektionsschutzmaßnahmen nicht berücksichtigt.